Aufgaben zu Parabeln

1.0 Die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S und den auf ihr liegenden Punkten P und Q.
Ermitteln Sie jeweils die Werte der Formvariablen a, b und c.

1.1 a = 4; S(-2/-5)

1.2 c = -2; P(2/3); Q(-1/4)

1.3 a = 2; P(4/0); b = c

1.4 b = 2; S(3/5)

2.0 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Parabeln gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

2.1 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 2.2 $y=3x^2-4x+2{,}5$ 2.3 $y=2x^2+6x+4{,}5$

3.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten schneidet.

3.1 A(0/-16), B(2/0) und C(-4/0)

3.2 A(0/-1), B(5/0) und C(-1/0)

4.0 Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Funktionen gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

4.1 $p_1: y=x^2+2$ und $p_2: y=x^2-2x+5$

4.2 $p_1: y=x^2-3x$ und $p_2: y=-x^2+x+6$

5.0 Von einer quadratischen Funktion sind der Leitkoeffizient a und die Nullstellen bekannt. Geben Sie die Funktionsgleichung in der Produktform, der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform an.

5.1 $a=1;\ x_1=-1;\ x_2=3$

5.2 $a=1{,}5;\ x_1=1;\ x_2=5$

5.3 $a=-2;\ x_1=2;\ x_2=2$

5.4 $a=\frac{2}{3};\ x_1=1{,}5;\ x_2=7{,}5$

6.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt.

6.1 Wenn die Nullstellen einer quadratischen Funktion sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse.

6.2 Wenn die Parabel die x-Achse berührt, hat der Scheitelpunkt den x-Wert 0.

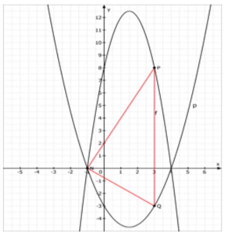
6.3 Wenn eine Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat und nach oben geöffnet ist, hat der Scheitelpunkt einen negativen y-Wert.

6.4 Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, lässt sich die Funktionsgleichung nicht in der Produktform angeben.

7.0 Gegeben sind die quadratische Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$ und die quadratische Funktion p mit $p(x) = 0{,}75x^2 - 2{,}25x - 3$.

7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der zugehörigen Parabeln.

7.2 Die Gerade g mit $g(x) = 2x + 2$ schneidet den Graphen von f im Punkt P. Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von p und hat die gleiche x-Koordinate wie der Punkt P.
Die Punkte N(-1/0), P und Q bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks.



7.3 Untersuchen Sie, um wie viel Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, damit er mit der Geraden g genau einen gemeinsamen Punkt hat.

8.0 Gegeben ist eine Parabelschar p_b mit $p_b(x) = -x^2 + 2bx - 6x + 6b - 7$.

8.1 Stellen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von b dar.

8.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel der Schar, die durch den Punkt B(-7/6) verläuft.

8.3 Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 - 8x - 13$ ist eine Parabel der Schar.
Berechnen Sie den Wert, den die Formvariable b für diesen Fall hat.

8.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass alle Parabeln der Schar durch den Punkt A(-3/2) verlaufen.

9 Gegeben sind die lineare Funktion $g: x \mapsto -\frac{4}{3}x+8$ und eine quadratische Funktion p mit den Definitionsmengen $D_g = D_p = \mathbb{R}$. Die beiden Schnittpunkte der Geraden G_g mit den Koordinatenachsen des Koordinatensystems liegen auf der Parabel G_p. Einer dieser Punkte ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel G_p.
Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsgleichung der quadratischen Funktion p.
(Abitur 2022 Teil 1)

Lösungen

1.1 $y=4x^2+bx+c$

$y=4(x+2)^2-5=4(x^2+4x+4)-5=4x^2+16x+16-5=4x^2+16x+11$

$\Rightarrow b=16 \qquad c=11$

1.2 $y=ax^2+bx-2$

$P(2/3)\Rightarrow 3=4a+2b-2 \Rightarrow 5=4a+2b$

$Q(-1/4)\Rightarrow 4=a-b-2 \Rightarrow 6=a-b$

(I) $5=4a+2b$

(II) $6=a-b \qquad \Rightarrow a=6+b$

$a=6+b$ in (I): $5=4(6+b)+2b \quad \Rightarrow 5=24+4b+2b \quad \Rightarrow 6b=-19$

$\Rightarrow b=-\frac{19}{6}$

$\Rightarrow a=6-\frac{19}{6}=\frac{17}{6}$

1.3 $y=2x^2+bx+b$

$P(0/4)\Rightarrow 0=2\cdot 16+4b+b \quad \Rightarrow 0=32+5b \quad \Rightarrow b=-\frac{32}{5}=-6,4=c$

1.4 $y=a(x-3)^2+5 \quad \Rightarrow y=a(x^2-6x+9)+5 \quad \Rightarrow y=ax^2-6ax+9a+5$

$\Rightarrow -6a=2 \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow c=9\cdot(-\frac{1}{3}+5)=-3+5=2$

2.1 $N_1(2/0)$ und $N_2(-2/0)$ 2.2 keine Nullstellen 2.3 $N(-\frac{3}{2}/0)$

3.1 Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$ und dann die Punkte A,B und C einsetzen

(I) $-16 = c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(III) $0 = 16a - 4b + c$

$\Rightarrow$ $a = 2$ und $b = 4$ $\Rightarrow$ $y = 2x^2 + 4x - 16$

3.2 gleicher Ansatz wie bei 3.1

$\Rightarrow \ y=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-1$

4.1 Ein Schnittpunkt: S(1,5/4,25)

4.2 Zwei Schnittpunkte: $S_1(-1/4)$ und $S_2(3/0)$

5.1 $y=(x+1)(x-3)$ $\quad y=x^2-2x-3$ $\quad y=(x-1)^2-4$

5.2 $y=1{,}5(x-1)(x-5)$ $\quad y=1{,}5x^2-9x+7{,}5$ $\quad y=1{,}5(x-3)^2-6$

5.3 $y=-2(x-2)(x-2)=-2(x-2)^2$ $\quad y=-2x^2-8x-8$ $\quad y=-2(x-2)^2$

5.4 $y=\frac{2}{3}(x-1{,}5)(x-7{,}5)$ $\quad y=\frac{2}{3}x^2-6x+7{,}5$ $\quad y=\frac{2}{3}(x-4{,}5)^2-6$

6.1 Richtig.

6.2 Falsch, $y=(x-1)^2$ berührt die x-Achse und der Scheitlepunkt hat den x-Wert 1.

6.3 Richtig.

6.4 Richtig.

7.1

$$-2x^2+6x+8=0{,}75x^2-2{,}25x-3 \quad \Rightarrow -2{,}75x^2+8{,}25x+11=0$$
$$\Rightarrow x_1=-1{,}04 \quad x_2=4{,}71$$
$$y_1=-0{,}40 \quad \Rightarrow S_1(-1{,}04/-0{,}40)$$
$$y_2=-8{,}11 \quad \Rightarrow S_2(4{,}71/-8{,}11)$$

7.2

$-2x^2+6x+8=2x+2 \quad \Rightarrow -2x^2+4x+6=0$

$\Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$

$\Rightarrow y_1=0 \quad y_2=8 \qquad \Rightarrow SP_1(-1/0) \quad P(3/8)$

$\Rightarrow Q(3/p(3)) \quad \Rightarrow Q(3/-3)$

$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot(3-(-1))\cdot(8-(-3))=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11=22$

7.3

$-2x^2+6x+t=2x+2 \quad \Rightarrow -2x^2+4x+t-2=0$

$D=16-4(-2)(t-2)=8t \quad \Rightarrow 8t=0 \quad \Rightarrow t=0$

Der Graph von f müsste um 8 Einheiten nach unten verschoben werden.

8.1

$x_S=-\frac{2b-6}{-2}=b-3$

$y_S=-(b-3)^2+2b(b-3)-6(b-3)+6b-7=$

$=-b^2+6b-9+2b^2-6b-6b+18+6b-7=b^2+2$

$\Rightarrow S(b-3/b^2+2)$

8.2

$-(-7)^2+2b(-7)-6(-7)+6b-7=6$

$-49-14b+42+6b-7=6 \quad \Rightarrow -8b-14=6 \quad \Rightarrow b=-2{,}5$

$\Rightarrow p_{-2,5}(x)=-x^2-11x-22$

8.3

(I) $2b-6=-8 \quad \Rightarrow b=-1$

(II) $6b-7=-13 \quad \Rightarrow b=-1$

8.4

$-(-3)^2+2b(-3)-6(-3)+6b-7=-9-6b+18+6b-7=2$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt (-3/2) gemeinsam

9

$g(x) = -\frac{4}{3}x + 8$

Schnittpunkt mit der x – Achse: $-\frac{4}{3}x + 8 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow N(6|0)$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $S_y(0|8)$

$p(x) = a(x-6)^2 \quad \Rightarrow 8 = a(0-6)^2 \Rightarrow 8 = 36a \Rightarrow a = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}(x-6)^2$

Alternative:

$p(x) = a \cdot x^2 + 8 \Rightarrow 0 = a \cdot 6^2 + 8 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$

$\Rightarrow p(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8$